Otros modelos de análisis de varianza: variantes de los diseños factoriales

© Pedro Morales Vallejo
Universidad Pontificia Comillas
Facultad de Ciencias Humanas y Sociales
(Última revisión 21 de Noviembre de 2009)

Índice

1. Introducción

Presentamos otros modelos de análisis de varianza que responden a preguntas y diseños más específicos. Prácticamente todos son variantes de los *diseños factoriales,* con dos criterios de clasificación. Hay más modelos y variantes; los expuestos aquí pueden ser especialmente útiles porque responden a planteamientos relativamente frecuentes y factibles.

Si investigar es en última instancia *responder a preguntas,* podremos hacernos más y mejores preguntas si disponemos de un *repertorio amplio de respuestas*. Las respuestas nos las dan a la vez los *análisis estadísticos* y los *diseños;* un mismo análisis, como el análisis de varianza bifactorial, puede responder a distintos diseños.

La misma *selección y disposición de los datos,* tal como aparecen en las tablas propias de los diversos enfoques del análisis de varianza y que presentamos aquí, pueden sugerir de manera intuitiva otras preguntas y planteamientos de investigación; basta pensar en otros factores o criterios para clasificar a los sujetos, manteniendo el mismo diseño o configuración de las tablas y el modo de análisis.

Aunque dispongamos de programas como el SPSS, el visualizar casos concretos, resueltos e interpretados, nos puede ayudar a seleccionar e interpretar mejor el *output* que nos dan estos programas. Cuando sea factible expondremos varios procedimientos 1) utilizando medias y desviaciones, 2) combinando los resultados de los análisis de varianza disponibles en EXCEL y 3) utilizando programas de Internet.

2. Análisis de varianza con dos criterios de clasificación (diseños factoriales): cuando n =1

El análisis de varianza con dos criterios de clasificación tiene una interesante modalidad en la que no suele pensarse: en cada celdilla puede haber *una sola observación,* el dato de un solo sujeto, o quizás con más frecuencia, la *media* de un grupo, pero en cualquier caso tendremos n = 1 en cada clasificación.

No es ésta una situación muy frecuente, pero es posible hacer el análisis de varianza con un solo dato en cada celdilla y puede tener su interés[1].

2.1. Qué suponemos (y qué no analizamos) cuando n = 1

En todos estos casos hay que tener algo muy claro: con n = 1 lo que *no podemos* es verificar si la *interacción* entre los dos factores es significativa (si *produce* diferencias en la variable dependiente y superiores a lo meramente aleatorio). Esta *no interacción* entre los dos factores es un presupuesto previo; al menos prescindimos de esta interacción. También cabe el que podamos dar por hecho que ambos factores están relacionados y que la interacción es importante, pero prescindimos de su confirmación.

Qué significa no analizar la interacción lo vemos de manera clara con el ejemplo que nos va a servir para exponer el procedimiento (tabla 1).

Los dos factores pueden ser: Factor A: dos facultades de la misma universidad,
Factor B: género del alumno

[1] No es frecuente encontrar este planteamiento en los textos habituales; una buena explicación con un ejemplo resuelto puede verse en Iversen y Norpoth (1987). El procedimiento que utilizamos aquí está más simplificado.

Se trata de los alumnos y alumnas del último curso; la *variable dependiente* (la que medimos) es *satisfacción* con la carrera, medida en una escala de 1 a 10. Los datos tabulados son las medias.

		Factor A (facultad)		
		A_1	A_2	*medias* de B
Factor B	B_1	3	6	4.5
(sexo alumno)	B_2	8	8	8
medias de A		5.5	7	

Tabla 1

Nuestras hipótesis (de acuerdo con los dos criterios de clasificación o factores) pueden ser estas dos:

1) Los alumnos en general están más satisfechos en una carrera que otra (por ejemplo $A_2 > A_1$)
2) Las alumnas están más satisfechas que los alumnos ($B_2 > B_1$)

Lo que no podemos verificar con n = 1 es si en el caso de que en una carrera los alumnos están más satisfechos que en otra, esa diferencia se explica precisamente porque en esa carrera (y no en otras) las alumnas están más satisfechas que los alumnos (es lo que llamamos *interacción* de los dos factores)

No podemos analizar la varianza correspondiente a la interacción porque nos falta en este caso el denominador de la razón F. Este denominador debería ser la varianza *dentro* de los grupos (recordemos que es $n\Sigma\sigma^2/N-k$) como ya hemos visto en la situación habitual de n > 1; en este caso, con un sólo sujeto en cada grupo, no hay obviamente varianza *dentro* de los grupos.

Este denominador (varianza dentro de los grupos) es también el que correspondería a las otras dos razones F (de los dos factores), pero en este caso utilizamos como denominador la varianza *residual,* la que nos queda cuando restamos a la varianza total las varianzas correspondientes a los dos factores.

2.2. En qué situaciones podemos disponer de un sujeto o una observación en cada clasificación

Naturalmente el análisis posible con n = 1 es más limitado que cuando tenemos más sujetos en cada clasificación. Sin embargo este análisis puede ser de interés en estos casos:

a) En cada casilla tenemos un solo sujeto o una sola observación porque por alguna razón ése es el único dato disponible y aun así este tipo de análisis responde a una pregunta de interés para el investigador.

b) Cuando utilizamos *medias* en vez de todas las puntuaciones individuales. En los casos en que n = 1, lo normal es que se trate de medias de grupos.

El utilizar *medias* es frecuente en estas circunstancias:

1. Cuando es el único dato disponible; a veces tomado de otras fuentes.

2. Como análisis *preliminar,* para ver si los dos factores principales (no su interacción) tienen algún efecto en la variable dependiente antes de hacer el proceso completo con todos los datos. O simplemente para tener una *visión general,* prescindiendo de diferencias individuales; podemos *además* hacer el análisis de varianza con todos los sujetos.

3. Cuando las muestras son de tamaño desigual lo más frecuente (y recomendado) es eliminar sujetos aleatoriamente para igualar los grupos, pero si las muestras, además de ser de tamaño desigual, son muy pequeñas, una posibilidad es utilizar las medias y así todas las muestras quedan igualadas en n = 1. También podemos utilizar medias con muestras desiguales aunque sean relativamente grandes.

2.3. Procedimiento

En última instancia el procedimiento que vamos a seguir (cuando tenemos solamente dos factores o criterios de clasificación) es *de facto* idéntico al análisis de varianza para *muestras relacionadas;* no es el mismo planteamiento pero las *operaciones* y el *output* son los mismos. Es más, si utilizamos un programa de ordenador podemos utilizar el de análisis de varianza para muestras relacionadas aplicado a los datos de un diseño factorial de dos factores con un solo sujeto en cada casilla (tenemos en definitiva *filas* y *columnas*)[2].

Explicamos el procedimiento mediante un sencillo ejemplo (datos en la tabla 1).

1º *Cálculos previos:* a) medias de los niveles de A y B (tabla 1)
b) *varianzas* de las *medias* de A y B σ^2 de A = $.75^2$
σ^2 de B = 1.75^2
c) varianza de los totales: σ^2_t = 2.05^2

2º *Sumas de cuadrados* de A = $N\sigma^2_{MA}$ = $(4)(.75^2)$ = 2.25
de B= $N\sigma^2_{MB}$ = $(4)(1.75^2)$ = 12.25
del total = $N\sigma^2_t$ = $(4)(2.05^2)$ = 16.81
residual: = $SC_t - (SC_A + SC_B)$ = 16.81-(12.25+ 2.25) = 2.31

La *suma de cuadrados residual* (del término del *error,* de la varianza *aleatoria* que nos va a servir como término de comparación) es lo que nos queda después de eliminar de la varianza total la correspondiente a los dos factores.

Los *grados de libertad* son los usuales. La tabla de resultados la tenemos en tabla 2.

Origen de la variación	SC *numerador*	gl *denominador*	$CM = \sigma^2 = \frac{SC}{gl}$	$F = \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$	p
Factor A (facultades)	2.25	A -1 = 1	2.25	$\frac{2.25}{2.31} = .97$	p > .05
factor B (sexo alumno)	12.25	B - 1 = 1	12.25	$\frac{12.25}{2.31} = 5.30$	p < .01
residual	2.31	(A-1)(B-1)= 1	2.31		
Total	16.81	N - 1 = 23			

Tabla 2

Solamente la varianza del Factor B es estadísticamente significativa; nuestra conclusión es que el sexo del alumno tiene que ver con la satisfacción con sus estudios (las alumnas están más satisfechas).

Tendremos una F significativa con más facilidad en la medida en que la varianza residual (el denominador de la razón F) sea menor, y ésta será menor cuando los grados de

[2] En EXCEL se trata del análisis de varianza de *dos factores con una muestra por grupo*

libertad de esta varianza residual sean más; por lo tanto con más niveles o categorías de clasificación en cada factor tenemos más probabilidad de detectar diferencias significativas.

Podemos ver qué sucede con los datos de la tabla 3 de *análisis de varianza con dos criterios de clasificación*[3] si utilizamos solamente las *medias* de los grupos en vez de los datos individuales. En esta tabla 3 tenemos los datos, utilizando solamente las medias (factor A métodos y factor B profesores).

	A_1	A_2	A_3	medias
B_1	4	3	2	3
B_2	5	5	2	4
B_3	7	5	6	6
B_4	8	7	6	7
medias	6	5	4	

Tabla 3

La varianzas que calculamos previamente son: $\sigma^2_{MA} =$ .667

$\sigma^2_{MB} =$ 2.50

$\sigma^2_t =$ 3.49

La tabla de resultados la tenemos en la tabla 4. El número de datos (N, que aquí es número de *medias* pues es la unidad de análisis que estamos utilizando) es igual a 12.

Origen de la variación	SC numerador	gl denominador	$CM = \sigma^2 = \frac{SC}{gl}$	$F = \frac{\sigma^2}{\sigma^2}$	p
Factor A (métodos)	(12)(.667) = 8	3 -1 = 2	$\frac{8}{2} = 4$	$\frac{4}{.646} = 6.19$	$p < .05$
factor B (profesores)	(12)(2.5) = 30	4 - 1 = 3	$\frac{30}{3} = 10$	$\frac{10}{.646} = 15.48$	$p < .01$
residual	(12)(3.49) - (30 + 8) = 3.88	(3-1)(4-1) = 6	$\frac{3.88}{6} =.646$		
Total	(12) (3.49) = 41.88	12- 1 = 11			

Tabla 4

Para comparar de una manera sencilla y rápida los resultados utilizando o bien todos los datos individuales, o solamente las medias, podemos calcular en ambos casos el coeficiente η^2 que expresa la proporción de varianza en la variable dependiente que podemos atribuir a diferencias entre los distintos niveles de cada uno de los factores.

El coeficiente η^2 lo calculamos dividiendo *cada suma de cuadrados parcial* por la *suma de cuadrados total;* obviamente expresa una proporción (y un porcentaje al multiplicarlo por 100).

[3] Nos referimos a la tabla 3 del documento *Análisis de varianza con dos criterios de clasificación (diseños factoriales)*

Proporción de varianza explicada por diferencias (η^2):

	en el Factor A	en el Factor B
Utilizando todos los datos individuales[4]:	$\eta^2 = \frac{40}{374} = .107$ (11%)	$\frac{150}{374}$ .40 (40%)
Utilizando solamente las medias:	$\eta^2 = \frac{8}{41.88} = .191$ (19%)	$\frac{30}{41.88} = .71$ (71.6%)

Utilizando tanto todos los datos individuales como las medias de cada subgrupo el *panorama general* es el mismo aunque los valores absolutos son muy distintos: el factor B (diferencias entre profesores) explica una mayor proporción de varianza que el factor A (diferencias entre métodos).

3. Análisis de varianza de un solo factor para bloques aleatorios (alternativa al *análisis de covarianza)*

Aunque a este diseño se le suele denominar de *un solo factor* (porque es un factor el que nos interesa), ya vamos a ver que se trata realmente de dos factores y estamos en un caso específico de los diseños factoriales.

3.1. En qué sentido se trata de una alternativa al *análisis de covarianza*

El *análisis de covarianza* es un tipo de análisis análogo al análisis de varianza en el que, dicho de manera muy simple, controlamos o neutralizamos una o más variables que pueden estar influyendo en nuestra variable dependiente de interés. Por ejemplo, si comparamos en rendimiento tres grupos que han seguido tres métodos distintos, el rendimiento previo, o los resultados de un pre-test, etc., puede estar contaminando los resultados y puede no quedar claro si las diferencias entre las muestras se deben (en un cierto grado al menos) a las diferencias entre los métodos (que es lo que nos interesa comprobar) o a diferencias en otras variables como la preparación previa, motivación, etc., que trae el alumno. Mediante el análisis de covarianza podemos comparar a las tres muestras pero *igualadas* en la variable (o variables) que deseamos controlar (ajustando las medias mediante procedimientos estadísticos que tienen en cuenta la correlación entre la variable controlada y la variable dependiente)[5].

Con este diseño vamos a controlar una variable (pueden ser más) porque esa variable va a ser precisamente uno de los dos criterios para clasificar a los sujetos, como veremos al explicar el procedimiento. El término *bloques aleatorios* quiere decir que los sujetos de cada bloque en rendimiento previo (o en la variable que queramos controlar) son asignados aleatoriamente a los distintos niveles del otro factor (los distintos métodos en este caso); es entonces cuando este diseño es análogo o equivalente al análisis de covarianza y es experimental en sentido propio.

Esta alternativa (y otras análogas) al análisis de covarianza es de interés porque el análisis de covarianza está *positivamente desaconsejado* cuando no hay *asignación aleatoria*

---

[4] Hemos utilizado todos los datos individuales en el ejemplo presentado en *Análisis de varianza con dos criterios de clasificación (diseños factoriales)*

[5] Cuando hay asignación aleatoria, autores como Guildford y Fruchter (1973:270) y Huitema (1980: 125) prefieren un diseño del tipo *matching* (emparejamiento de los sujetos de dos en dos en la variable o variables que se quieren controlar) o de *bloques aleatorios* al análisis de covarianza (prefieren controles más directamente observables sin recurrir a procedimientos estadísticos). Puede verse más explicado en *El control de variables: control estadístico (análisis de covarianza) y control experimental mediante diseño* http://www.upco.es/personal/peter/investigacion/Controldevariables.pdf

de los sujetos a las diversas condiciones[6], y esto no es siempre fácil o posible cuando trabajamos con *grupos hechos*. Este sería el caso (frecuente) si los alumnos pertenecen a clases distintas y ya formadas[7]. Ya no podríamos hablar de diseño experimental porque al no haber asignación aleatoria de los sujetos de cada bloque a las distintas clases no controlamos otras variables (y habría que tenerlo en cuenta en la interpretación y valoración de los resultados) pero este análisis siempre aporta una información útil aunque más limitada, y en cualquier caso es la alternativa apropiada al análisis de covarianza que no se debe hacer cuando no hay asignación aleatoria de los sujetos a las distintas condiciones.

3.2. Procedimiento

El planteamiento es exactamente igual al de los diseños factoriales con dos factores, un factor es el factor principal (ejercicios) y el otro factor son los criterios de agrupamiento. También podemos resolverlo directamente en EXCEL si disponemos de todos los datos individuales (no sólo las medias de cada subgrupo como en este procedimiento). El método para resolverlo es también el mismo ya visto (tabla 5)[8].

Este planteamiento de análisis de varianza (y que como otros modelos de análisis de varianza responde a un diseño específico) lo presentamos con un ejemplo (datos ficticios, tabla 5) en el que tenemos:

1º Un único factor principal o criterio de clasificación dividido en tres niveles; en este ejemplo se trata de tres ejercicios (o *experiencias didácticas),* o de tres variantes de un mismo método.

Se plantea a los alumnos un mismo ejercicio que consta a) de un texto que deben leer y b) seguido de una serie de preguntas de comprensión y análisis y es en estas preguntas donde se introducen tres variantes (que son los tres *niveles* de este factor): 1ª preguntas objetivas, 2ª preguntas objetivas *más* explicación de la repuesta elegida y 3ª preguntas abiertas.

2º Los sujetos, alumnos en este caso, están divididos en *tres bloques* según *rendimiento previo* (*alto, medio y bajo*)[9], porque es ésta la variable que queremos controlar; el *criterio de agrupación* es precisamente la variable que controlamos.

En cada clasificación el número de sujetos debe ser el mismo (como en la tabla 5), por eso hay que buscar un número de bloques adecuado para que dentro de cada bloque no haya sujetos muy distintos (en este ejemplo, y con números iguales en cada bloque, en los bloques alto y bajo podría haber sujetos demasiado distintos en la variable que queremos controlar).

La *variable dependiente* puede ser un breve test de comprensión de los conceptos presentes en el texto estudiado. Lo que se desea averiguar es qué tipo de preguntas favorecen más la comprensión de los conceptos.

Puede suceder que un ejercicio sea más eficaz que los otros independientemente del nivel de los alumnos o que un determinado tipo de ejercicios sea mejor para determinados alumnos (los sujetos son distintos en cada clasificación; se trata de muestras independientes).

---

[6] Pueden verse, por ejemplo, Kirk, (1995:708-709) y Hinkle, Wiersma y Jurs (1994:485).

[7] Tendríamos que suponer que el mismo profesor da la misma asignatura en las tres clases.

[8] Si utilizamos EXCEL, en *Herramientas* vamos a *Análisis de datos* y elegimos *Análisis de Varianza de dos factores con varias muestras por grupo*

[9] El *rendimiento previ*o podrían ser notas previas, un pre-test, etc.; estos datos suelen recogerse *antes* del tratamiento pero no hay problema en buscarlos *durante* o *después* del tratamiento si se puede justificar que no se ven afectados por el tratamiento o variable independiente (Huitema, 1980:133, 135).

Cálculos previos:	los *totales* (N = 36)	σ_t =	15.1560
	las *medias de los ejercicios* (3 medias)	σ_{MA}=	2.8160
Desviación típica de	las *medias de los bloques* (3 medias)	σ_{MB}=	6.5650
	las *medias de los grupos* (9 medias)	σ_{Mg}=	8.3206
Suma de las varianzas de los grupos (6 varianzas)		$\sum\sigma^2_g$ =	1444.3075

	Factor A: ejercicios			
Factor B: Bloques *igualados*	A_1 Ejercicio 1	A_2 Ejercicio 2	A_3 Ejercicio 3	Medias de los Bloques
B_1: rendimiento previo *alto*	57 45 27 25	50 31 43 11	58 34 36 30	37.25
Media y desviación	38.50 (13.22)	33.75 (14.79)	39.50 (10.90)	
B_2: rendimiento previo *medio*	56 38 26 8	29 38 18 35	56 16 25 5	29.17
Media y desviación:	32.00 (17.49)	30.00 (7.65)	25.50 (18.98)	
B_3: rendimiento previo *bajo*	26 21 18 10	23 7 12 9	48 19 38 23	21.17
Media y desviación:	18.75 (5.80)	12.75 (6.18)	32.00 (11.64)	
Medias Ejercicios	29.75	25.50	32.33	

Tabla 5

En la tabla de resultados (tabla 6) incluimos las fórmulas de las sumas de cuadrados (que es donde suele estar la dificultad de cálculo) y que son las ya vistas en los diseños factoriales.

Origen	Sumas de Cuadrados	Grados lib.	CM	F
A: Factor principal *Ejercicios*	$N\sigma^2_{MA} = (36)(2.816)^2 = 285.47$	A - 1 = 2	$\frac{285.47}{2} = 142.735$	$\frac{142.735}{213.97} = .67$
B: Bloques igualados	$N\sigma^2_{MB} = (36)(6.565)^2 = 1551.41$	B - 1 = 2	$\frac{1551.57}{2} = 775.70$	$\frac{775.78}{213.97} = 3.62$
Error experimental Mét. x Bloques	$N\sigma^2_{Mg} - (N\sigma^2_{MA} + N\sigma^2_{MB}) =$ $(36)(8.3206)^2 - (258.47 + 1551.57) = 655.508$	(A-1)(B-1) = (2)(2) = 4	$\frac{655.32}{4} = 163.87$	$\frac{163.83}{213.97} = .76$
término del error	$n\Sigma\sigma^2_g = (4)(1444.3075) = 5777.23$	N - g = 36 - 9 = 27	$\frac{5777.23}{27} = 213.97$	
Total	$N\sigma^2_t = (36)(15.156)^2 = 8629.36$			

Tabla 6

Los *cuadrados medios del término del error* se pueden calcular también directamente si hemos calculado las desviaciones típicas de los subgrupos dividiendo por N - 1, ya que son iguales a la varianza media de todos los subgrupos (de idéntico tamaño).

3.3. Interpretación de los resultados

La única F significativa es la correspondiente a los *bloques igualados* ($p < .05$); en este caso el resultado carece de interés porque ya sabíamos que los sujetos eran distintos en rendimiento; ése era precisamente el criterio para agruparlos en bloques. El interés del planteamiento estaba en verificar si algún tipo de ejercicio era más eficaz que otro independientemente del criterio de agrupación. Aun así, observando los datos, podemos ver que la media del ejercicio 3 es mayor que la de los otros dos, sobre todo para el grupo de bajo rendimiento; con más sujetos o explorando qué pasa con los de rendimiento bajo los resultados podrían ser otros.

Lo que nos aporta este planteamiento es poder *visualizar* la posibilidad de utilizar los diseños factoriales utilizando un factor como criterio para agrupar a los sujetos y controlar así esta variable.

3.4. Diseño alternativo

Una alternativa puede ser no agrupar a los alumnos en bloques según su nivel previo, sino igualarlos en cada fila. Agrupados en bloques puede haber diferencias relativamente importantes dentro de cada bloque; estas diferencias se pueden minimizar si los igualamos de tres en tres, controlando mejor el nivel previo. En la tabla 5 tenemos 12 alumnos en cada bloque de B (cuatro en cada uno de los tres niveles del factor A de *ejercicios*); podríamos igualarlos de manera más ajustada de tres en tres, y tendríamos tantos bloques como *tríos* de alumnos igualados (12 *tríos*). Esta alternativa puede ser mejor porque se puede hacer un igualamiento más fino y exacto, pero también puede resultar más complicado.

En este caso el procedimiento de análisis adecuado sería un *análisis de varianza para muestras relacionadas*[10].

4. Análisis de varianza *jerárquico* o *anidado* para *muestras independientes*

Se trata de un diseño factorial *incompleto,* porque no todos los niveles de un factor o criterio de clasificación se combinan con todos los niveles del otro factor. A estos diseños se les denomina *anidados* o *jerárquicos*: los niveles de un factor están *anidados* en los niveles del otro factor.

4.1. Cuándo nos puede interesar este planteamiento

A veces no es posible combinar todos los niveles de un factor con todos los niveles del otro. Vamos a suponer, por ejemplo, que queremos comparar en *satisfacción con la tarea* (variable dependiente) a profesores de tres facultades de la misma universidad. Pensamos que cómo funciona el departamento al que pertenecen (*grado de cohesión, cantidad y calidad de la comunicación dentro del departamento*) puede estar influyendo en su satisfacción con la universidad. No podemos combinar facultades con departamentos porque cada facultad tiene sus propios departamentos; en este caso *anidamos* los departamentos en *sus* facultades.

Otros ejemplos posibles: queremos comparar la eficacia de tres métodos, experiencias, etc., que han sido puestos en práctica en centros distintos. Puede suceder que la eficacia del método tenga que ver con cómo funciona el centro. Como no podemos combinar centros y métodos, *anidamos* los centros en los métodos.

---

[10] El análisis es el mismo visto en el diseño anterior con $n = 1$ en cada clasificación; en EXCEL es un análisis de varianza *de dos factores con una muestra por grupo.*

4.2. Procedimiento 1

Exponemos dos maneras de llevar a cabo este análisis; una que sólo requiere el cálculo de medias y desviaciones típicas (varianzas); otra manera de abordarlo es haciendo dos análisis de varianza convencionales, para muestras independientes combinando los resultados de ambos análisis en una única tabla de resultados.

En este ejemplo (datos ficticios, tabla 7) tenemos dos factores: el factor A es, en este ejemplo, *facultad* (tres facultades distintas) y el factor B *departamentos* (dos departamentos en cada facultad). La variable dependiente es *satisfacción en la universidad;* las muestras son seis profesores por departamento.

	Facultad A_1		Facultad A_2		Facultad A_3	
	B_1 Depart.1	B_2 Depart.2	B_3 Depart.3	B_4 Depart.4	B_5 Depart.5	B_6 Depart.6
N = 36 n = 6	22 13 3 14 7 9	19 15 11 17 12 19	13 15 11 12 16 13	21 19 17 16 15 20	17 7 5 6 8 9	16 13 11 9 10 13
Dep. M B (σ)	11.33 (6.02)	15.50 (3.15)	13.33 (1.70)	18.00 (2.16)	8.67 (3.94)	12.00 (2.31)
Fac. M A (σ)	13.416 (5.235)		15.67 (3.0368)		10.33 (3.636)	

Tabla 7

Hemos calculado las medias y las desviaciones típicas de los seis departamentos y de las tres facultades. El procedimiento para el análisis es varianza es *casi* idéntico al ya visto en los diseños factoriales (tabla 8).

Cálculos previos:

Desviación típica del total (de N = 36):	$\sigma_t =$	4.626
Desviación típica de las *tres medias* de las facultades:	$\sigma_{MA} =$	2.186
Desviación típica de las *seis medias* de los departamentos:	$\sigma_{MB} =$	2.990

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Factor principal, Facultades (A)	$N\sigma^2_{MA} = (36)(2.186)^2 = 172.03$	A - 1 = 2	$\frac{172.03}{2} = 86.015$	$\frac{86.015}{14.95} = 5.75$ ($p < .01$)
Factor *anidado* Departamentos (B)	$N\sigma^2_{MB} = (36)(2.99)^2 = 149.8$	B - A = 6 - 3 = 3	$\frac{149.8}{3} = 49.933$	$\frac{49.933}{14.95} = 3.34$ ($p < .05$)
Término del error	$\sum n\sigma^2_B = 448.47$	B (n -1) = (6)(6 -1) = 30	$\frac{448.47}{30} = 14.95$	
Total	$N\sigma^2_t = (36)(4.626)^2 = 770.3$	N -1 = 36 -1 = 35		

Tabla 8

Las fórmulas de las *sumas de cuadrados* y de los *grados de libertad* figuran en la misma tabla de resultados (tabla 8).

El cálculo de los grados de libertad *no* es idéntico al ya visto en los diseños factoriales.

Como en casos semejantes (con *muestras independientes),* los *cuadrados medios del término del error* (o *varianza dentro de los grupos,* el denominador de la razón F) es la *varianza media* de los seis grupos si calculamos las varianzas dividiendo por N-1 (es otra manera de calcularlos).

En este caso tanto la facultad como los departamentos (los dos factores, *principal* y *anidado*) están influyendo en la variable dependiente (satisfacción de los profesores); en qué medida influyen podríamos cuantificarlo mediante el coeficiente η^2 (η^2 = Suma de cuadrados parcial/Suma de cuadrados total).

4.3. Procedimiento 2 (EXCEL).

Otra manera de llevar a cabo este análisis consiste en hacer dos análisis de varianza para muestras independientes (en EXCEL)[11] que nos dan casi todos los valores para completar la tabla de resultados del análisis de varianza anidado.

Análisis 1. Análisis de varianza para muestras independientes con los niveles del factor A; en este ejemplo son las tres facultades con n = 12 cada una.

Análisis 2. Análisis de varianza para muestras independientes con los niveles del factor B; en este ejemplo los seis departamentos con n = 6 cada uno.

En la figura 1 tenemos cómo incorporar los resultados de estos dos análisis a la tabla de resultados del análisis de varianza anidado, completando algunos cálculos tal como se indica en esta tabla.

<table>
<tr><th>Origen de la variación</th><th>Sumas de Cuadrados</th><th>Grados de Libertad</th><th>Cuadrados Medios</th><th>F = CM/CM_{error}</th></tr>
<tr><td>Factor principal, Facultades (A)</td><td colspan="3">Datos del análisis 1 correspondientes a la varianza entre grupos</td><td rowspan="2">En ambos casos el denominador son los CM del término del error</td></tr>
<tr><td>Factor anidado Departamentos (B)</td><td>Suma de cuadrados entre grupos del análisis 2
menos
Suma de cuadrados entre grupos del análisis 1</td><td>Los indicados en tabla 8</td><td>Suma de Cuadrados/gl</td></tr>
<tr><td>Término del error</td><td colspan="3">Datos del término del error (cuadrados medios dentro de los grupos) de la tabla de resultados del análisis 2
Los cuadrados medios son el denominador (o término del error) de las dos razones F</td><td></td></tr>
</table>

Figura 1

Para mayor claridad hacemos estos dos análisis con los mismos datos de la tabla 7

Análisis 1º En la tabla 9 tenemos los datos de las tres facultades (factor A) dispuestos para analizarlos con EXCEL.

[11] Este procedimiento puede ser útil si sólo disponemos de EXCEL

Facultad A_1	Facultad A_2	Facultad A_3
22	13	17
13	15	7
3	11	5
14	12	6
7	16	8
9	13	9
19	21	16
15	19	13
11	17	11
17	16	9
12	15	10
19	20	13

Tabla 9

En la tabla 10 tenemos la tabla de resultados del análisis 1º

Origen	SC	GL	CM	F	p	Valor crít. F
Entre grupos (A)	172,056	2	86,028	4,745	0,015	3,285
Dentro de los grupos	598,250	33	18,129			
Total	770,306	35				

Tabla 10

Análisis 2º En la tabla 11 tenemos los mismos datos de la tabla 7 para hacer el segundo análisis; corresponden a los departamentos (factor B)

Departamento B_1	Departamento B_2	Departamento B_3	Departamento B_4	Departamento B_5	Departamento B_6
22	19	13	21	17	16
13	15	15	19	7	13
3	11	11	17	5	11
14	17	12	16	6	9
7	12	16	15	8	10
9	19	13	20	9	13

Tabla 11

Los resultados de este análisis de varianza los tenemos en la tabla 12.

Origen	SC	Gl	CM	F	p	Valor crít. F
Entre grupos	322,806	5	64,561	4,328	0,004	2,534
Dentro grupos (error)	447,500	30	14,917			
Total	770,306	35				

Tabla 12

Por último en la tabla 13 tenemos el análisis de varianza definitivo integrando los resultados de los dos análisis de varianza (tablas 10 y 12) siguiendo las indicaciones de la figura 1.

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Factor principal, Facultades (A)	172,056	2	86,028	5.76 p < .01
Factor *anidado* Departamentos (B)	322,806 - 172,056 = 150.55	6-3 = 3	150.55/3 = 50.18	3.36 p < .05
Término del error	447,500	30	14,917	
Total	770.106	37		

Tabla 13

Si comparamos las tablas 8 y 13 veremos que tenemos los mismos resultados con ligeras diferencias por el redondeo de decimales, pero los valores de F son prácticamente los mismos. Si hemos seguido este proceso tenemos que consultar las tablas de la F para 2 y 30 grados de libertad (factor A, $p < .01$) y 3 y 30 grados de libertad (factor B, $p<.05$).

Podemos completar la información calculando los coeficientes η^2; las diferencias entre facultades explican el 22% de la varianza (172.056/770.106) y las diferencias entre departamentos explican el 19 % de la varianza (150.55/770.106).

5. Análisis de varianza *jerárquico* o *anidado* para *muestras relacionadas*

En este análisis de varianza tenemos 1º un *factor principal* dividido en tres niveles, 2º un *factor anidado* y *además* 3º *muestras relacionadas* (las 6 filas de nuestro ejemplo, en cada fila tenemos sujetos distintos pero igualados en una o más variables que queremos controlar).

5.1. Interés del planteamiento

Una posibilidad que nos ofrece este planteamiento es el de poder controlar alguna o algunas variables y ver qué influjo tienen en la variable dependiente. Vamos a suponer que queremos comprobar si existen diferencias en la actitud de los alumnos hacia las *asignaturas de estadística y métodos de investigación* (variable dependiente, la que *medimos* a los sujetos) en tres carreras o facultades. La *facultad* es el factor principal (factor A).

Podríamos hacer un análisis de varianza unifactorial (comparando las tres facultades), pero podemos pensar que la actitud de los alumnos hacia la asignatura puede también tener que ver con dos variables más, una es el estilo del profesor, cualquiera que sea la facultad y la otra variable puede ser el rendimiento previo del alumno en estas materias o su rendimiento en general.

1. Para tener en cuenta el estilo docente del profesor escogemos a dos profesores de cada facultad; los profesores van a ser el factor *anidado* (factor B) porque no podemos combinar a todos los profesores con todas las facultades. Podríamos escoger más profesores, pero el número de profesores por facultad debe ser el mismo.

2. La actitud de los alumnos hacia estas asignaturas puede depender también de su *nivel académico*. Por eso escogemos alumnos *igualados* en *rendimiento medio previo* de manera que podamos controlar esta variable (e indirectamente otras variables asociadas al rendimiento, como pueden ser capacidad, motivación, etc.). En cada *fila* tenemos alumnos *igualados en rendimiento previo.*

En un caso real deberíamos procurar disponer de una muestra mayor de alumnos aunque esta igualación puede de alguna manera compensar el bajo número de sujetos. Tenemos por lo tanto un análisis de varianza *anidado* y *además* con *muestras relacionadas*.

5.2. Procedimiento 1

El procedimiento es semejante al del análisis de varianza anidado para muestras independientes, pero añadiendo una varianza (o *cuadrados medios)* más, la correspondiente a los alumnos (las *filas).*

Como en el análisis anterior, veremos también como llevar a cabo este análisis haciendo análisis de varianza parciales.

Nuestros datos están en la tabla 14.

	Facultad A_1		Facultad A_2		Facultad A_3		medias
sujetos	B_1 Prof. 1	B_2 Prof. 2	B_3 Prof. 3	B_4 Prof. 4	B_5 Prof. 5	B_6 Prof. 6	filas
1	22	27	24	28	26	29	26.00
2	24	30	26	31	29	32	28.67
3	25	33	29	35	31	36	31.50
4	27	37	27	38	32	38	33.17
5	24	39	28	40	30	40	33.50
6	26	41	30	41	31	42	35.17
Medias y σ Prof. (B)	24.67 (1.598)	34.50 (4.958)	27.33 (1.972)	35.50 (4.717)	29.83 (1.951)	36.17 (4.487)	
Medias y σ Fac. (A)	29.583 (6.143)		31.416 (5.454)		33.00 (4.690)		

Tabla 14

En este caso tenemos los mismos datos que en el planteamiento de un análisis de varianza anidado convencional y *además* las medias de las *filas* (de cada serie de alumnos igualados en rendimiento medio).

Indicamos cómo se calculan las *sumas de cuadrados* y los *grados de libertad* en la misma tabla de resultados (tabla 15).

Cálculos previos:

Desviación típica del total (N = 36 datos) $\sigma_t =$ 5.637

Desviación típica de las medias del factor principal (A, 3 medias) $\sigma_{MA} =$ 1.396

Desviación típica de las medias de los *profesores* (B, 6 medias) $\sigma_{MB} =$ 4.349

Desviación típica de las medias de las *filas* (6 medias) $\sigma_{Mf} =$ 3.119

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Factor *principal* (facultades) (A)	$N\sigma^2_{MA} = (36)(1.396)^2 = 70.17$	A -1 = 2	$\frac{70.17}{2} = 35.1$	$\frac{35.1}{4.52} =$ 7.76 ($p < .01$)
Factor *anidado* (profesores) (B)	$N\sigma^2_{MB} - N\sigma^2_{MA} = (36)(4.349)^2 - 70.17 = 610.7$	B-A = 6 - 3 = 3	$\frac{610.7}{3} =$ 203.567	$\frac{303.567}{4.52} =$ 45 ($p < .01$)
Filas (sujetos igualados)	$N\sigma^2_{Mf} = (36)(3.119)^2 = 350.2$	f -1 = 6 -1 = 5	$\frac{350.2}{5} =$ 70.4	$\frac{70.04}{4.52} =$ 15.6 ($p < .01$)
término del error	$N\sigma^2_t - (N\sigma^2_{MA} + N\sigma^2_{MB} + N\sigma^2_{Mf}) =$ $= 1144 - (70.17 + 610.7 + 350.2) = 113$	(Total menos los anteriores) = 25	$\frac{113}{25} = 4.52$	
Total	$N\sigma^2_t = (36)(5.637)^2 = 1144$	N -1 = 36 -1 = 35		

Tabla 15

La suma de cuadrados del *término del error* (de la varianza *residual)* la podemos calcular de dos maneras:

a) Restando a la suma de cuadrados total las tres sumas de cuadrados precedentes (factor principal, factor anidado y filas, tal como figura en la tabla 15).

b) También podemos calcularla varianza del *término del error* de esta manera (puede servir de comprobación, redondeando decimales).

1º Sumando las varianzas del factor anidado (los subgrupos de la tabla 14) y multiplicando esta suma por *n:*

Suma de las varianzas: $1.598^2+4.958^2+1.972^2+4.717^2+1.951^2+4.487^2 = 77.21$

Multiplicando por n: (77.21)(6) = 463.26

2º Restamos a esta cantidad la suma de cuadrados de las filas ($N\sigma^2_{Mf}$) que tenemos en la tabla 11: 463.26-350.2 = 113

En este ejemplo ficticio tenemos que las tres fuentes de varianza (facultades, profesores y alumnos) son significativas. Que el nivel de los alumnos es fuente de diferencias podríamos darlo por hecho; posiblemente lo más relevante de estos resultados es que los profesores son la fuente más importante de varianza, como podemos ver por los coeficientes η^2:

$$\eta^2 \text{ Facultades} = \frac{70.17}{1144} = .06$$

$$\eta^2 \text{ Profesores} = \frac{610.7}{1144} = .53$$

$$\eta^2 \text{ Alumnos} = \frac{350.2}{1144} = .31$$

Una mera inspección de las medias de los profesores en este ejemplo ficticio nos indica que los mejores profesores (a juzgar por sus medias) se reparten en las tres facultades. Aunque las tres razones F son estadísticamente significativas, son estos coeficientes los que nos permiten matizar la interpretación y cuentan la historia definitiva. En este ejemplo (ficticio) la satisfacción de los alumnos con la asignatura tiene que ver sobre todo con los profesores ($\eta^2 = .53$), menos (aunque también) con el nivel previo de los alumnos ($\eta^2 = .31$) y muy poco con la facultad a la que pertenecen ($\eta^2 = 06$).

5.3 Procedimiento 2 (EXCEL)

Otra manera de resolver este análisis de varianza que puede quizás resultarnos más sencilla es hacer (con una hoja de cálculo como EXCEL) tres análisis de varianza en cuyas tablas de resultados encontramos la información necesaria para completar la tabla de resultados (tabla 15) del análisis de varianza *jerárquico* o *anidado* para *muestras relacionadas.*

Estos análisis de varianza son:

Análisis 1. Un análisis de varianza para muestras independientes con las tres muestras del factor principal (facultades en este ejemplo). En este caso tenemos tres grupos con n = 12 en cada caso (uniendo los dos profesores de cada facultad).

Análisis 2. Un análisis de varianza para muestras independientes con las seis muestras *anidadas* (profesores), cada una con n = 6 en este ejemplo.

Análisis 3. Un análisis de varianza para *muestras relacionadas* en la que tenemos en este ejemplo 6 *filas* (los sujetos igualados) y 6 columnas (los 6 *profesores*).

En la figura 2 tenemos la información que nos dan estos tres análisis de varianza para completar nuestra tabla de resultados (lo que ya tenemos en la tabla 15).

<table>
<tr><td>Origen de la variación</td><td>Sumas de Cuadrados</td><td>Grados de Libertad</td><td>Cuadrados Medios</td><td>F = CM/CM_{error}</td></tr>
<tr><td>Factor principal (facultades) (A)</td><td colspan="3">Datos del análisis 1 correspondientes a la varianza entre grupos</td><td rowspan="2">En ambos casos el denominador son los CM del término del error</td></tr>
<tr><td>Factor anidado (profesores) (B)</td><td>Suma de Cuadrados entre grupos del análisis 2 menos Suma de Cuadrados entre grupos del análisis 1</td><td>Como se indica en la tabla 10</td><td>Suma de Cuadrados/gl</td></tr>
<tr><td>Filas (sujetos igualados)</td><td colspan="4">Todos los datos de las filas de la tabla de resultados del análisis 3 (muestras relacionadas)</td></tr>
<tr><td>término del error</td><td colspan="3">Datos del término del error o de la interacción de la tabla de resultados del análisis 3 (muestras relacionadas)
Los cuadrados medios son el término del error; el denominador de las tres razones F</td><td></td></tr>
</table>

Figura 2

Como en el caso anterior y para mayor claridad, hacemos los tres análisis de varianza (EXCEL).

Análisis 1º. Los datos que vamos a analizar en este primer análisis (las tres facultades, muestras independientes) están dispuestos en la tabla 16 (hemos juntado los datos de los dos profesores de cada facultad que figuran en la tabla 14)

Facultad A_1	Facultad A_2	Facultad A_3
22	24	26
24	26	29
25	29	31
27	27	32
24	28	30
26	30	31
27	28	29
30	31	32
33	35	36
37	38	38
39	40	40
41	41	42

Tabla 16

En la tabla 17 tenemos los resultados de este análisis de varianza apara muestras independientes.

Origen	*SC*	*Gl*	*CM*	*F*	*p*	*F crít.*
Entre grupos	70,167	2	35,083	1,078	0,352	3,285
Dentro de los grupos	1073,833	33	32,540			
Total	1144	35				

Tabla 17

Análisis 2º En este análisis de varianza para muestras independiente tenemos a los 6 profesores; datos en la tabla 18

B_1 Prof. 1	B_2 Prof. 2	B_3 Prof. 3	B_4 Prof. 4	B_5 Prof. 5	B_6 Prof. 6
22	27	24	28	26	29
24	30	26	31	29	32
25	33	29	35	31	36
27	37	27	38	32	38
24	39	28	40	30	40
26	41	30	41	31	42

Tabla 18

La tabla 19 es la tabla de resultados de este análisis de varianza.

Origen	*SC*	*Gl*	*CM*	*F*	*p*	*F crít.*
Entre grupos	680,667	5	136,133	8,814	0,000	2,534
Dentro de los grupos	463,333	30	15,444			
Total	1144	35				

Tabla 19

Análisis 3º Los datos son los mismos de la tabla 18; pero en este caso se trata de muestras relacionadas (en cada fila sujetos igualados). Los resultados los tenemos en la tabla 20

Origen	*SC*	*Gl*	*CM*	*F*	*p*	*F crít.*
Filas	350	5	70	15,441	0,000	2,603
Columnas	680,667	5	136,133	30,029	0,000	2,603
Error	113,333	25	4,533			
Total	1144	35				

Tabla 20

Ahora nos queda integrar en la tabla de resultados final tabla 21 los resultados de estos tres análisis de varianza siguiendo las indicaciones de la figura 2-

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Factor *principal* (facultades) (A)	70,167	2	35,083	7.74 $p < .01$
Factor *anidado* (profesores) (B)	680.667- 70.167 = 610.5	6-3 = 3	203.5	45 $p < .01$
Filas (sujetos igualados)	350	5	70	15,441 $p < .01$
término del error	113,333	25	4.53	
Total	1144	35		

Tabla 21

La fila correspondiente al total la podemos completar sumando las correspondientes columnas. Salvo pequeñas diferencias debidas al redondeo de decimales, los resultados son los mismos que hemos visto en la tabla 15. Si hemos seguimos este procedimiento vamos a las tablas de la F para ver los valores de p (probabilidad) correspondiente: Factor A, grados de libertad 2 y 25, Factor B, grados de libertad 3 y 25 y filas (*sujetos igualados*), grados de libertad 5 y 25. Las tres fuentes de varianza son estadísticamente significativas pero su importancia es muy desigual como ya hemos visto en los coeficientes η^2.

6. Análisis de varianza: diseños factoriales (2x2) para muestras relacionadas

6.1. Interés del planteamiento

Como en otros casos, este planteamiento nos permite controlar variables que pueden contaminar los resultados y oscurecer su interpretación.

Este modelo de análisis de varianza es el clásico diseño factorial con dos criterios de clasificación pero con una modalidad nueva: se trata de *muestras relacionadas,* es decir, los sujetos de cada *fila* (tal como se presentan los datos en la tabla 22) están igualados en una variable que se quiere controlar.

6.2. Procedimiento

A partir de medias y desviaciones típicas, el procedimiento es algo más complejo que otros planteamientos, pero no lo es tanto si disponemos bien los datos (además disponemos al menos de un programa en Internet indicado el apartado correspondiente)[12].

Lo explicamos con un ejemplo (tabla 22) que conviene tener a la vista.

Tenemos a los sujetos clasificados según dos factores (en la parte izquierda de la tabla en las que están los datos obtenidos).

1º Un factor A (*facultad* en este ejemplo) dividido en este caso en dos niveles (por ejemplo Facultad de Ciencias o Facultad de Letras);

2º Un factor B también con dos niveles que se combinan con los dos niveles del factor A; este factor B puede ser el haber estudiado previamente en un centro *privado* o *público.*

filas: grupos *igualados*	datos en la Facultad A_1		datos en la Facultad A_2		Medias de las filas (Mf)				
	A_1B_1	A_1B_2	A_2B_1	A_2B_2	MfA_1	MfA_2	MfB_1	MfB_2	Mft
1	6	2	10	4	4	7	8	3	5.5
2	12	6	11	7	9	9	11.5	6.5	9
3	16	8	13	6	12	9.5	14.5	7	10.75
4	20	7	14	12	13.5	13	17	9.5	13.25
5	22	13	15	10	17.5	12.5	18.5	11.5	15
Med. y σ de AB	15.2 (5.74)	7.2 (3.54)	12.6 (1.85)	7.8 (2.856)	Medias en A:		Medias en B:		
					MA_1 = 11.2	MA_2 = 10.2	MB_1 = 13.9	MB_2 = 7.5	

Tabla 22

Además tenemos *muestras relacionadas,* con sujetos *igualados* en alguna variable que queremos controlar porque puede afectar a la variable dependiente (por ejemplo *capacidad intelectual* medida con un test o *rendimiento previo*).

Tenemos por último la *variable dependiente* que hemos medido, que en este caso puede ser *satisfacción* con la universidad.

---

[12] Estamos exponiendo estos métodos tal como se pueden llevar a cabo con una simple calculadora con programación estadística o con un ahoja de cálculo como EXCEL (para calcular medias y desviaciones). Sobre todo con pocos sujetos (frecuente en diseños experimentales) son procedimientos sencillos y factibles. En la medida en que el diseño es más complejo y hay más operaciones por medio, como es éste el caso y también el del análisis de varianza siguiente, es preferible optar por un programa informático (como el SPSS, siempre que sea posible), aun así pensamos que en este caso (como en todos los demás) el disponer de ejemplos resueltos *paso a paso* ayuda a entender lo que estamos haciendo y también a entender mejor el *output* de un programa informático. Ya hemos mencionado que este diseño lo tenemos además en un programa de Internet que indicamos al final.

Las *filas* o grupos igualados pueden ser sujetos individuales, o también podrían ser *medias* de clases o grupos. Lo que deseamos comprobar es si el factor A, o el factor B, o una combinación de ambos, producen (o con más rigor *están asociados a*) efectos significativos en la variable dependiente y esto con independencia de la variable que queremos controlar y que nos ha servido para igualar a los sujetos de cada fila.

Los datos originales son los de las cuatro columnas a la izquierda de la tabla: A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1 y A_2B_2. En cada una de las cinco filas tenemos sujetos distintos pero igualados en la variable que deseamos controlar (capacidad intelectual o rendimiento previo en este ejemplo).

Los cálculos necesarios para resolver el análisis de varianza son más, pero el proceso es sencillo si disponemos de un modelo a la vista. Es importante tener los datos bien dispuestos (como en la tabla 22) para evitar confusiones.

En la parte izquierda de la tabla tenemos los datos originales dispuestos por columnas; debajo de cada columna tenemos las medias y desviaciones típicas.

En la parte derecha de la tabla (separada con una doble línea) tenemos las *medias de las filas:*

en A (MfA_1 y MfA_2)
en B (MfB_1 y MfB_2)
en A+B (toda la fila, Mft)

Por ejemplo:

la media de la primera fila de A_1 (MfA_1) es igual a $(6 + 2)/2 =$ 4
la media de la primera fila de B_2 (MfB_2) es igual a $(2+4)/2 =$ 3
la media de la primera fila de A+B (Mft) es igual a $(4+7+8+3)/4 =$ 5.5

También calculamos las medias (M) de A (MA_1 y MA_2) y las medias de B (MB_1 y MB_2), que están puestas debajo de la parte derecha de la tabla; nos basta calcular la *media de las medias de las filas* (son las medias de las columnas correspondientes, tal como está en la tabla 22).

Tenemos por lo tanto estos datos:

las *medias de las filas* en A_1 y en A_2 (MfA_1 y MfA_2)
las *medias de las filas* en B_1 y en B_2 (MfB_1 y MfB_2)
las *medias totales de las filas* (Mft)
las *medias y desviaciones de cada columna* (A_1B_1, A_1B_2, A_2B_1 y A_2B_2)
las *medias de* A_1 y A_2, y las *medias* de B_1 y B_2

Antes de calcular las Sumas de Cuadrados, calculamos las desviaciones típicas de los totales y de todos los grupos de *medias* (también podemos calcular directamente las varianzas, que es lo que vamos a utilizar):

Desviación típica	de los *totales* (N = 20)	σ_t	= 5.041
	de las *medias* de AB (4 medias)	σ_{MAB}	= 3.336
	de las *medias* de A (2 medias)	σ_{MA}	= 0.50
	de las *medias* de B (2 medias)	σ_{MB}	= 3.20
	de las *medias totales de las filas* (5 medias)	σ_{Mft}	= 3.314
	de las *medias de las filas* de A (10 medias)	σ_{MfA}	= 3.607
	de las *medias de las filas* de B (10 medias)	σ_{MfB}	= 4.646

Origen Variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Factor A	$N\sigma^2_{MA} = (20)(.5)^2 = 5$ $\boxed{a}$	A -1 = 2-1 = 1	$\frac{5}{1} = 5$	$\frac{CM_A}{CM_{Axf}} = \frac{5}{8.9} = .56$
Factor B	$N\sigma^2_{MB} = (20)\ (3.2)^2 = 204.8$ $\boxed{b}$	B -1 = 2 -1 = 1	$\frac{204.8}{1}$ = 204.8	$\frac{CM_B}{CM_{Bxf}} = \frac{204.8}{1.7}$ = 120.47
Interacción: A x B	$N\sigma^2_{MAB} - (a+ b)$ $\boxed{c}$ $= (20)\ (3.336)^2 - (5 + 204.8) = 12.8$	(A -1)(B -1) = 1	$\frac{12.8}{1}$ = 12.8	$\frac{CM_{AxB}}{CM_{AxBxf}} = \frac{12.8}{5.9}$ = 2.17
filas	$N\sigma^2_{Mft} = (20)(3.314)^2 = 219.65$ $\boxed{d}$	(f -1) = (5 -1) =4	$\frac{219.65}{4}$ = 54.91	
error de A: A x f	$N\sigma^2_{MfA} - (a + d)$ $\boxed{e}$ $= (20)\ (3.607)^2 - (5 + 219.65) = 35.56$	(A -1)(f -1) = (2 -1)(5 -1) = 4	$\frac{35.56}{4}$ =8.9	
error de B: B x f	$N\sigma^2_{MfB} - (b + d)$ $\boxed{f}$ $= (20)(4.643)^2 - (204.8+219.65) = 6.7$	(B-1)(f -1) = (2 -1)(5 -1) = 4	$\frac{6.7}{4}$ = 1.7	
error de AxB: A x B x f	$N\sigma^2_t - (a + b + c + d + e + f) = 23.78$ $\boxed{g}$	(A -1)(B -1)(f - 1) = (2-1)(2-1)(5-1) = 4	$\frac{23.74}{4}$ = 5.9	
Total	$N\sigma^2_t = (20)(5.041)^2 = 508.23$	N -1 = 20 -1 = 19		

Tabla 23

En la tabla de resultados (tabla 23) tenemos cómo calcular las *sumas de cuadrados* y los *grados de libertad.* Para simplificar las fórmulas identificamos con una letra encerrada en un recuadro las distintas sumas de cuadrados.

Las tres varianzas principales (o *cuadrados medios)* que nos interesan son las correspondientes a los dos factores, A y B, y a la interacción AxB: nos interesa verificar en qué medida influyen en la variable dependiente.

Además calculamos las varianzas que van a ser los denominadores (o término del error) para calcular las tres razones F de interés; estos denominadores son distintos en cada razón F (como puede observarse en la tabla 23).

La única *fuente de diferencias* significativa es la que corresponde al factor B (en este ejemplo ficticio, el haber estudiado en un centro privado o público).

6.3. Programa en Internet

Este análisis lo tenemos disponible en un programa de Internet:

Lowry, Richard, VassarStats: Web Site for Statistical Computation,Vassar College, Poughkeepsie, NY, USA; http://faculty.vassar.edu/lowry/VassarStats.html

En el menú de la izquierda en ANOVA buscamos **Two-Factor ANOVA with Repeated Measures on Both Factors**

Para utilizar este programa los datos hay que introducirlos tal como están presentados en la tabla 24 aunque los datos pueden quedar más claros inicialmente tal como están en la tabla 22 en la que en cada fila están igualados los sujetos.

	A_1	A_2
B_1	6	10
	12	11
	16	13
	20	14
	22	15
B_2	2	4
	6	7
	8	6
	7	12
	13	10

Tabla 24

Si comparamos estos datos con los de la tabla 22 caeremos en la cuenta de que los primeros sujetos de cada subgrupo en la tabla 24 (con puntuaciones de 6, 2 10 y 4) corresponden a la primera fila de la tabla 22, y así sucesivamente.

7. Análisis de varianza: diseños *mixtos*

7.1. Muestras independientes y muestras relacionadas en el mismo análisis

Esta modalidad de análisis de varianza corresponde a un tipo de diseños llamados *mixtos* porque se combinan en el mismo planteamiento muestras independientes y muestras relacionadas. Es un diseño útil cuando tenemos dos (o más) grupos en los que los sujetos son medidos en ocasiones distintas o en variables distintas. El ejemplo presentado (tablas 25 y 26) sugiere la utilidad que puede tener este análisis[13].

Tenemos dos factores o criterios de clasificación:

1º Un factor es la pertenencia a un grupo (dos o más muestras independientes). En el ejemplo que presentamos los dos grupos son *hombres* y *mujeres,* por lo que no hay asignación aleatoria; pero podría haberla si los dos grupos correspondieran a dos métodos de enseñanza, dos experiencias, etc. En la presentación habitual de estos cuadros, lo que tenemos es que las *filas* están agrupadas en dos o más bloques.

2º En el otro factor (las *columnas,* en la presentación habitual de los datos) tenemos medidas *repetidas* en diversas ocasiones o circunstancias; en este caso tenemos por lo tanto

[13] Si la asignación de los sujetos a los grupos es *aleatoria* estos diseños se denominan en inglés *split-plot*. Estos diseños se utilizaron al comienzo en agricultura; *plot* es un terreno y *split* significa dividido (se parcela un terreno, por ejemplo para experimentar con variedades de semillas y de fertilizantes).

muestras relacionadas. En este factor los sujetos pueden ser medidos en lo mismo pero en diversas *dosis,* o en tiempos o circunstancias distintas, etc.; pueden ser también respuestas idénticas *(importancia, eficacia, gusto,* etc.) a distintas preguntas del mismo ámbito como en el ejemplo que nos sirve para introducir este análisis de varianza[14].

Como vamos a ver en el ejemplo propuesto para explicar el procedimiento, vamos a tener a los mismos sujetos en las *filas,* como en el caso común de muestras relacionadas, lo que sucede es que estas *filas o sujetos* pertenecen a más de un grupo.

Vamos a explicar el procedimiento con un ejemplo resuelto[15] que nos permite seguir y entender el proceso paso a paso e interpretar los resultados. Aunque puede resultar laborioso, en el apartado siguiente indicamos un programa de Internet con el que se puede hacer rápidamente este análisis[16].

Factor A: *género;* tenemos dos muestras *independientes* (sujetos físicamente distintos), hombres y mujeres (un factor con dos niveles)

Factor B: *posibles causas o explicaciones de la pobreza* (cuatro niveles)[17].

La *variable dependiente* (la que hemos medido) es la *importancia* que los sujetos atribuyen a esas posibles causas de pobreza. Se trata de muestras *relacionadas* porque los mismos sujetos responden a las cuatro atribuciones.

Otros ejemplos con el mismo esquema: factor A tratamientos (ejercicios, métodos, etc., o medidas en el mismo rasgo a los mismos sujetos pero en tiempos distintos) y factor B tipos de personas, grupo experimental y de control, etc.

El esquema es por lo tanto el de la tabla 25

Factor A: *importancia de las atribuciones de la pobreza*

		A_1 *Familia*	A_2 *Suerte*	A_3 *Esfuerzo*	A_4 *Salario bajo*
Factor B *género*	B_1 hombres				
(muestras independientes)	B_2 mujeres				

Tabla 25

Vamos a ver dos procedimientos para llevar a cabo este análisis de varianza, semejantes a los ya vistos en otros planteamientos; el procedimiento 1 uno basado solamente en el cálculo de medias y desviaciones pero que puede resultar bastante laborioso, y el procedimiento 2, que puede ser más sencillo, combinando varios análisis de varianza (para muestras independientes y muestras relacionadas) que se hacen muy fácilmente en EXCEL. Mencionamos además al final algún programa de Internet.

---

[14] En Calvo (1993:163) pueden verse alguna sugerencia para utilizar este diseño en planteamientos de investigación educacional.

[15] En este ejemplo tomamos los datos de Girden (1992:41), no el modo de resolverlo aunque puede comprobarse que los resultados son los mismos. Pueden verse otro ejemplo resuelto en Calvo (1993), con los cálculos de las *sumas de cuadrados* expuestos con claridad según el método tradicional.

[16] Estos programas no nos suelen dar los coeficientes η^2 u otros semejantes que son importantes en la interpretación final. Es útil disponer de un ejemplo resuelto de manera completa.

[17] El significado de estas atribuciones no tiene mayor importancia en este momento pues se trata de explicar el procedimiento; por *familia* se entiende factores de educación familiar, como no motivar para el éxito y *esfuerzo* se refiere genéricamente a factores internos, como una mala administración del dinero (Girden, 1992). Una puntuación *más baja* significa *mayor* importancia (en este ejemplo, tomado de una investigación real).

7.2. Procedimiento 1

Con los datos de la tabla 25 se podría pensar en hacer dos análisis de varianza por separado, uno para cada grupo (en cada caso muestras relacionadas), o si tuviéramos más de dos grupos (en el factor B) podríamos hacer un análisis de varianza unifactorial por cada variable para comparar los grupos en cada columna (o una t de Student por variable si sólo hay dos grupos como en este caso). No es éste el mejor procedimiento porque aumentan las probabilidades de error al no aceptar la Hipótesis Nula, sin embargo el plantear análisis de varianza unifactoriales puede estar indicado en algunas situaciones: a) para analizar alguna variable dependiente conceptualmente independiente de las demás (por ejemplo, importancia que se da a la *familia*), b) para comparar nuestros resultados con otros análisis de varianza unifactoriales (en los que, por ejemplo, se ha comparado en otros grupos la importancia que se da al *esfuerzo*), o c) para hacer un análisis meramente exploratorio y prescindir de alguna variable (de las que figuran en el encabezado de las columnas) que no va a dar juego si en el análisis unifactorial obtenemos una razón F que no llega a 1)[18].

Si en cada clasificación (tabla 23, tenemos 8 subgrupos) tuviéramos *distintos* sujetos, tendríamos un diseño factorial (2x4) para muestras independientes, pero lo que tenemos es a los mismos sujetos en las *filas*.

En estos diseños hay que controlar el posible efecto del *orden* cuando los mismos sujetos *pasan* por las distintas condiciones o responden a las distintas preguntas; el *orden* puede no afectar a las respuestas (no siempre afecta), pero hay que tener presente esta posibilidad. El influjo del orden puede ser importante cuando las *columnas* son actividades o situaciones por las que pasan los sujetos en tiempos distintos, pero no es tan importante cuando las *columnas* son simples preguntas (como en este caso).

En la tabla adjunta (tabla 26) tenemos las puntuaciones de 10 sujetos (5 hombres y 5 mujeres) valorando la *importancia* de las cuatro atribuciones o posibles causas de la pobreza (o riqueza).

Además tenemos en la misma tabla 26:

a) Las medias y desviaciones de cada subgrupo (8 subgrupos)

b) La media de cada sujeto (de cada *fila)* (10 filas)

c) La media y la desviación de cada *columna* (4 columnas); las desviaciones de las columnas (atribuciones, factor A) no nos van a hacer falta, pero son útiles con fines informativos.

d) Las medias de los dos grupos (dos medias; basta calcular en cada caso la *media de las medias* de las filas de B_1 y de B_2)

Además tenemos que:

[18] Puede verse una explicación más amplia en Huberty y Morris (1987). Una razón más cuestionable que aducen estos autores para llevar a cabo simples análisis de varianza unifactoriales es cuando el investigador no entiende bien (y no va a interpretar bien) estos análisis más complejos *(when the researcher is multuivariately naive).* Ya hemos indicado en otra nota que el ver ejemplos resueltos de análisis de varianza más complejos ayuda también a entender los resultados que nos dan los programas informáticos, por otra parte y como explicamos en otro apartado, este diseño se puede analizar en EXCEL mediante análisis de varianza más simples y además también lo tenemos resuelto en un programa de Internet que indicamos al final.

N = 40 (número de *datos,* no número de sujetos)

n = 5 (número de sujetos en cada clasificación).

A = 4 (número de atribuciones, o *número de niveles* en A)

B = 2 (número de grupos, o *número de niveles* en B).

	A_1 *familia*	A_2 *suerte*	A_3 *esfuerzo*	A_4 *salario bajo*	medias de los sujetos	
B_1 *hombres*	48	31	24	29	33	Media B_1 = MfB_1 = 34.8
	46	34	25	31	34	
	45	37	27	35	36	
	37	39	30	38	36	
	45	34	29	32	35	
	M = 44.2 σ = 3.763	M = 35.0 σ = 2.757	M = 27 σ = 2.28	M = 33 σ = 3.162		
B_2 *mujeres*	28	17	19	20	21	Media B_2 = MfB_2 = 23.0
	32	18	20	22	23	
	35	19	22	24	25	
	39	16	19	22	24	
	31	15	20	22	22	
	M = 33.0 σ = 3.742	M = 17.0 σ = 1.414	M = 20.0 σ = 1.095	M = 22.0 σ = 1.265		
medias y σ atribuciones	MA_1 = 38.6 σ = 6.741	MA_2 = 26.0 σ = 9.263	MA_3 = 23.5 σ = 3.93	M A_4 = 27.5 σ = 6.00		

Tabla 26

Nos interesa conocer qué *fuentes de variabilidad* son *significativas (generan* diferencias por encima de lo que se puede esperar por azar). Esta variabilidad viene expresada por las varianzas correspondientes a estas tres *fuentes de diversidad:*

a) La varianza correspondiente a los *grupos,* factor B (¿Un grupo da más importancia *en general* que el otro a las distintas atribuciones?).
b) La varianza correspondiente a las *atribuciones,* factor A (¿Hay diferencias *en general* en la importancia que se da a las distintas atribuciones?).
c) La varianza correspondiente a la *interacción* (¿Difieren los grupos en la importancia que dan precisamente a algunas atribuciones?).

Además nos interesan las varianzas que expresan la variabilidad aleatoria *(término del error),* que van a ser el denominador de la razón F, y que no va a ser el mismo para las tres varianza anteriores.

El proceso es más complejo que en otros planteamientos de análisis de varianza, pero procediendo con orden y haciendo los cálculos previos oportunos, no resulta complicado. Utilizando nuevos símbolos para los distintos cálculos parciales se facilita el poder seguir el proceso.

Cálculos previos:

Para simplificar el proceso vamos a proceder de esta manera:

1º Calculamos una serie de varianzas (del total y de conjuntos de medias, como en otros planteamientos)
2º Multiplicamos estas varianzas por N (número de datos = 40) y en un caso por 5, (número de sujetos en cada clasificación; símbolo *f* en la última fila de la tabla18).

Varianzas		*multiplicada por*	=	*símbolo*
Varianza de los totales (las 40 puntuaciones)	$\sigma_t^2 = 79.09$	N = 40	3163.6	$\boxed{a}$
Varianza de las medias de A (4 medias)	$\sigma_{MA}^2 = 33.405$	N = 40	1336.2	$\boxed{b}$
Varianza de las medias de B (2 medias)	$\sigma_{MB}^2 = 34.81$	N = 40	1392.4	$\boxed{c}$
Varianza de las medias de AB (8 subgrupos)	$\sigma_{MAB}^2 = 72.12$	N = 40	2884.8	$\boxed{d}$
Varianza de las medias de *todas* las filas (10 filas)	$\sigma_{Mf}^2 = 36.49$	N = 40	1459.6	$\boxed{e}$
Suma de las varianzas de los 8 subgrupos AB	$\Sigma\sigma_{AB}^2 = 55.75$	n = 5	278.741	$\boxed{f}$

Tabla 27

A estos productos les designamos con una letra (tabla 27) para clarificar las fórmulas de las *sumas de cuadrados* puestas en la tabla 28.

Estos cálculos no ofrecen especial dificultad una vez que tenemos calculadas todas las medias posibles (lo que vamos a utilizar en las sumas de cuadrados son las *varianzas de los distintos grupos de medias,* como venimos haciendo hasta ahora).

Método alternativo para calcular la varianza total

Si tenemos muchos sujetos, nos puede resultar más sencillo calcular la varianza de los totales a partir de 1º la media total (que es la *media de las medias* de cualquier conjunto de grupos que comprenda a todos los sujetos), y 2º las medias y *desviaciones típicas,* también de cualquier conjunto de grupos que comprenda a todos los sujetos.

En este caso y viendo lo que tenemos ya calculado en la tabla de datos, tenemos dos posibilidades: utilizar las medias y desviaciones o de los ocho subgrupos (combinaciones AB) o de los cuatro niveles de A; en ambos casos tenemos incluidos a todos los sujetos. Aquí es más cómodo utilizar los datos de los cuatro niveles de A porque son menos (más sencillo sería utilizar las medias y desviaciones de los niveles de B porque son solamente dos, pero no tenemos calculadas las desviaciones de B_1 y B_2).

Utilizamos la fórmula que tenemos en el anexo III con los datos de los cuatro niveles de A (k = 4). La media total es 28.9

$$\sigma_t^2 = \frac{\Sigma M^2 + \Sigma\sigma^2}{k} - M_t^2 = \frac{38.6^2 + 6.741^2 + 26^2 + 9.263^2 + 23.5^2 + 3.93^2 + 27.5^2 + 6^2}{4} - 28.9^2 = 79.08$$

Con estos cálculos previos[19] pasamos con facilidad a calcular las *sumas de cuadrados*.

En la tabla de resultados (tabla 28) figuran:

a) Las fórmulas de las *sumas de cuadrados;* las letras minúsculas corresponden a los *cálculos previos* de la tabla precedente (tabla 26);

b) Cuáles son los *grados de libertad* en cada caso. En los dos factores principales y su interacción los grados de libertad son los que ya estamos acostumbrados a ver en otros planteamientos: A-1; B-1 (A y B = número de niveles en cada factor); y (A-1)(B-1); los

[19] Recordamos que utilizando una calculadora con programación estadística, la *suma* del numerador se calcula rápidamente con la función programada Σx^2

grados de libertad de los dos términos del error son algo distintos. Con *n* simbolizamos el número de sujetos en cada clasificación (n = 5 en este ejemplo).

c) Los *cuadrados medios* (o varianzas; dividimos las sumas de cuadrados por los grados de libertad) están simbolizados por una letra mayúscula en un recuadro, para visualizar con más facilidad cuál es el *denominador de la razón F* en cada caso: en el *factor relacionado* y en la *interacción* puede observarse que el denominador de F es distinto que en el factor con muestras independientes (pertenencia a un grupo).

La *suma de cuadrados total* no es realmente necesaria para completar la tabla, pero es útil tenerla calculada para hacer comprobaciones, y además nos servirá luego para calcular los coeficientes ω^2.

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Grupos, Factor B *(muestras independientes)*	$\boxed{c}$ = 1392.4	B - 1 = 2 – 1 = 1	1392.4 (= $\boxed{G}$)	$\frac{[G]}{[H]} = \frac{1392.4}{8.4} =$ 165.762
Dentro de los grupos; (*error* del factor B)	$\boxed{e}$ - $\boxed{c}$ = 1459.6 - 1392.4 = 67.2	(B) (n -1) = (2)(5 -1) = 8	8.4 (= $\boxed{H}$)	
Tratamiento, Factor A *(muestras relacionadas)*	$\boxed{b}$ = 1336.2	A - 1 = 4 - 1= 3	445.4 (= $\boxed{I}$)	$\frac{[I]}{[K]} = \frac{445.4}{8.814} =$ 50.53
Interacción, A x B	$\boxed{d}$ - ($\boxed{b}$ + $\boxed{c}$)= 2884.8 - (1336.2 + 1392.4) = 156.2	(A-1)(B-1) = (4-1)(2-1) = 3	52.067 (= $\boxed{J}$)	$\frac{[J]}{[K]} = \frac{52.067}{8.814} =$ 5.907
Tratamiento x *dentro* de los grupos (*error* de A y A x B)	$\boxed{c}$ + $\boxed{f}$ - $\boxed{e}$ = 1392.4 + 278.741 - 1459.6 = 211.54	(A-1)B(n-1) = (3)2(5-1) = (3)(8) = 24	8.814 (= $\boxed{K}$)	
Varianza total	$\boxed{a}$ = 3163.6	(n)(A)(B) -1 = (5)(4)(2) -1 = 39		

Tabla 28

Sobre esta tabla 28 hacemos estas observaciones:

1. Si nos fijamos en lo que hemos hecho, el denominador *(término del error)* del factor B (grupos independientes) es distinto del que utilizamos en el factor A (muestras relacionadas) y en la interacción AxB. Ambos denominadores, con algunos ajustes, reflejan la variabilidad normal *dentro* de los grupos.

2. Cabe hacer distintas comprobaciones:

a) Podemos comprobar que las *sumas de cuadrados* y *grados de libertad* del *total* es igual a la suma de todos los precedentes.

b) Caben otras comprobaciones y otras maneras de llegar a las mismas *sumas de cuadrados;* por ejemplo:

$$SC_{AxB} = \boxed{a} - (\boxed{b} + \boxed{c} + \boxed{f}) = 3163.6 - (1336.2 + 1392.4 + 278.741) = 156.2$$

$$SC_{tratam.x\ dentro} = \boxed{a} - (SC_A + SC_{AxB} + \boxed{e}) = 3163.6 - (1336.2 + 156.2 + 1459.6) = 211.6$$

3. Si utilizamos un programa de ordenador podremos reconocer todos los datos de la tabla de resultados, pero es posible que nos encontremos con otras dos sumas de cuadrados con sus correspondientes grados de libertad pero sin cuadrados medios y sin razón F. Aquí no figuran en la tabla porque no son necesarios, pero sí conviene saber de qué se trata para reconocer los resultados que nos puede dar el ordenador. Se trata de:

Suma de Cuadrados *entre* sujetos = $\boxed{e}$ = 1459.6 (= N x *varianza de las medias de las filas,* tabla 27)

Suma de Cuadrados *dentro* de los grupos = $\boxed{a}$ - $\boxed{e}$ = 1704

Podemos ver con facilidad que se trata de las dos grandes sumas parciales de cuadrados (separadas por una línea doble en la tabla 28) en las que se divide la suma de cuadrados total:

1392.4+67.2 =	1459.6
1336.2+156.2+211.54 =	1703.94
Suma de cuadrados total =	3163.54

Lo mismo sucede con los grados de libertad: 1+8+3+3+24 = 39

Interpretación:

Factor B:	F = 165.762,	con 1 y 8 grados de libertad,	$p < .01$
Factor A:	F = 50.067,	con 3 y 24 grados de libertad,	$p < .01$
Interacción AxB:	F = 5.907,	con 3 y 24 grados de libertad,	$p < .01$

Tanto la pertenencia a uno u otro grupo, como las distintas atribuciones y la interacción entre grupo y atribución están relacionadas con la variable dependiente y explican la varianza total.

Como se trata de muestras relacionadas y la condición de *esfericidad* no suele cumplirse[20] estas probabilidades deben considerarse más bien liberales por lo que respecta al factor relacionado (el A) y a la interacción. Con un criterio más estricto nos fijamos en los grados de libertad más conservadores (1 y N-1, ó 1 y 39) y necesitamos un valor de F de 7.71 (para $p<.01$); en este caso la *interacción* deja de ser significativa.

Por lo que respecta a los *grupos* (factor B), como sólo hay dos grupos no hay necesidad de hacer comparaciones específicas, está claro que uno da más importancia a las atribuciones que el otro. Si a cada sujeto le sumamos todas sus puntuaciones a todas las atribuciones y hacemos un contraste de medias entre hombres y mujeres llegaremos al mismo resultado (teniendo en cuenta que cuando comparamos dos grupos $t^2 = F$).

Las *atribuciones* (factor A) también difieren entre sí en la importancia asignada por los sujetos; lo más claro es la mucha importancia que se da a la *familia* (en los dos grupos) y la poca, en términos relativos, al *esfuerzo*.

El que la *interacción* sea significativa quiere decir que al menos algunas medias entre niveles de la misma variable son significativamente distintas en uno de los niveles de la otra variable[21]. Por simple inspección de los datos vemos que los varones dan mucha más importancia a todas las atribuciones que las mujeres (la diferencia mayor está en *suerte*).

---

[20] Se puede repasar lo dicho sobre este tema en el análisis de varianza para muestras relacionadas

[21] Puede verse en Girden (1992) todo lo referido a los contrastes posteriores en este tipo de diseños.

Aunque las tres fuentes de diferencias son significativas, no todas tienen la misma importancia. Podemos comprobar el grado de asociación entre las tres varianzas y la variable dependiente, por medio de los coeficientes η^2 y ω^2:

$$\eta^2 \text{ del Factor A} = \frac{1336.2}{3163.6} = .42$$

$$\eta^2 \text{ del Factor B} = \frac{1392.4}{3163.6} = .44$$

$$\eta^2 \text{ de la interacción AxB} = \frac{156.2}{3163.6} = .05$$

En términos comparativos la importancia de la interacción es mucho menor: *pesan más* las diferencias entre los grupos (en todas las atribuciones) y entre las atribuciones (uniendo los dos grupos) que las diferencias específicas entre los grupos en alguna atribución en especial o entre las atribuciones en uno de los grupos.

También podemos calcular los coeficientes ω^2, que serán algo más bajos que los coeficientes η^2. Para calcular estos coeficientes necesitamos conocer los *cuadrados medios entre sujetos,* que no hemos calculado antes:

$$\text{Cuadrados Medios entre sujetos} = \frac{N\sigma^2_{\text{Mf}}}{\text{número total de sujetos - 1}} \qquad 1$$

El numerador ya lo hemos calculado antes en $\boxed{\text{e}}$ (tabla 27) y el denominador es 10 -1, por lo que

$$\text{CM}\textit{entre sujetos} = \frac{1459.6}{10-1} = 162.178$$

La fórmula general de ω^2 en estos casos es la siguiente:

$$\omega^2 = \frac{\text{SC}_{\text{de interés}} \text{ - (A - 1)(B - 1)(CM}_{\text{tratamiento x dentro}})}{\text{SCtotal} + \text{CM}_{\text{entre sujetos}} + (\text{nxBxCM}_{\text{tratamiento x dentro}})} \qquad 2$$

La fórmula queda más clara al verla calculada en los tres coeficientes de interés e identificar estos valores al compararlos con los que están en la tabla de resultados (tabla 28):

$$\omega^2 \text{ del Factor A} = \frac{1336.2-(4-1)(2-1)(8.814)}{3163.6+162.178+(5)(2)(8.814)} = \frac{1309.758}{3413.918} = .38$$

$$\omega^2 \text{ del Factor B} = \frac{1392.4-(4-1)(2-1)(8.814)}{3163.6+162.178+(5)(2)(8.814)} = \frac{1357.144}{3413.918} = .40$$

$$\omega^2 \text{ de la interacción AxB} = \frac{156.2-(4-1)(2-1)(8.814)}{3163.6+162.178+(5)(2)(8.814)} = \frac{120.944}{3413.918} = .04$$

Los resultados son muy parecidos a los vistos con el coeficiente η^2.

7.3. Procedimiento 2 (EXCEL).

Como en otros casos podemos combinar los resultados de los análisis de varianza más sencillos que podemos hacer muy fácilmente en EXCEL. Con los datos de que disponemos (en la tabla 26) hacemos cuatro análisis de varianza, tres para muestras independientes y uno para muestras relacionadas.

Análisis 1º, **análisis de varianza para muestras independientes** con los datos de las **filas** (factor B); en este caso se trata de *dos muestras;* hombres y mujeres. Aunque se trata solamente de dos grupos no utilizamos la t de Student porque nos interesa la información de la tabla de resultados de este análisis de varianza (tabla 29)

Tabla de resultados del análisis 1º

Origen	SC	GL	CM	F	p	F crít.
Entre grupos	1392,4	1	1392,4000	29,8731	0,0000	4,0982
Dentro de los grupos	1771,2	38	46,6105			
Total	3163,6	39				

Tabla 29

Análisis 2º, **análisis de varianza para muestras independientes** con los datos de las **columnas** (factor A); **uniendo los niveles del factor B** (hombres y mujeres) en un solo grupo; tenemos por lo tanto cuatro grupos (tantos como columnas).

Para visualizar mejor lo que estamos haciendo ponemos los datos de este análisis en la tabla 30 (tomados de la tabla 26).

A_1 *familia*	A_2 *suerte*	A_3 *esfuerzo*	A_4 *salario bajo*
48	31	24	29
46	34	25	31
45	37	27	35
37	39	30	38
45	34	29	32
28	17	19	20
32	18	20	22
35	19	22	24
39	16	19	22
31	15	20	22

Tabla 30

Los resultados en la tabla 31

Tabla de resultados del análisis 2º

Origen	SC	GL	CM	F	p	F crít.
Entre grupos	1336,2	3	445,4000	8,7744	0,0002	2,8663
Dentro de los grupos	1827,4	36	50,7611			
Total	3163,6	39				

Tabla 31

Análisis 3º, **análisis de varianza para muestras independientes** con los datos de las **columnas** (factor A); pero **sin unir los niveles del factor B**; en este análisis tendremos por lo ocho grupos (cuatro de hombres, B_1, y cuatro de mujeres, B_2).

En la tabla 32 ponemos los datos para mayor claridad; reorganizamos la presentación de los datos de la tabla 26.

Datos de los hombres (B_1)				Datos de las mujeres (B_2)			
A_1 *familia*	A_2 *suerte*	A_3 *esfuerzo*	A_4 *salario bajo*	A_1 *familia*	A_2 *suerte*	A_3 *esfuerzo*	A_4 *salario bajo*
48	31	24	29	28	17	19	20
46	34	25	31	32	18	20	22
45	37	27	35	35	19	22	24
37	39	30	38	39	16	19	22
45	34	29	32	31	15	20	22

Tabla 32

Los resultados de este análisis de varianza en la tabla 33.

Tabla de resultados del análisis 3º

Origen	SC	GL	CM	F	p	F crít
Entre grupos	2884,8	7	412,1143	47,3015	0,0000	2,3127
Dentro de los grupos	278,8	32	8,7125			
Total	3163,6	39				

Tabla 33

Análisis 4º, análisis de varianza para muestras relacionadas con todos los sujetos (uniendo los sujetos del factor B, hombres y mujeres).

Los datos, tomados de la tabla 26, son los mismos de la tabla 30, pero allí analizamos 4 muestras independientes y ahora los analizamos como muestras relacionadas (el mismo sujeto en cada fila). Resultados en la tabla 34.

Tabla de resultados del análisis 4º

Origen	SC	GL	CM	F	p	F crít.
Filas	1459,6	9	162,1778	11,9054	0,0000	2,2501
Columnas	1336,2	3	445,4000	32,6966	0,0000	2,9604
Error	367,8	27	13,6222			
Total	3163,6	39				

Tabla 34

Con estas cuatro tablas a la vista podemos fácilmente completar la tabla de resultados que realmente nos interesa, siguiendo las indicaciones de la figura 3 que corresponde a la tabla 28.

Origen de la variación	Sumas de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	F
Grupos, Factor B *(muestras independientes)*	**Anál. 1º, SC entre** 1392.4	B -1 = 2-1 = 1	1392.4	1392.4/8.4 = 165.762
Dentro de los grupos; (*error* del factor B)	**Anál. 4º SC filas *menos* Anál. 1º SC entre 1459.6 – 1336.2 = 67.2**	B (n-1) = (2) (5-1) = 8	8.4	
Tratamiento, Factor A *(muestras relacionadas)*	**Anál. 4º SC columnas 1336.2**	A -1 = 4-1 = 3	445.4	445.4/8.817 = 50.52
Interacción, A x B	**Anál. 3º SC entre *menos* (Anál. 2º SC entre + Anál.1º SCentre) 2884.8 – (1336.2+1392.4) =156.2**	(A-1)(B-1 = (4-1)(2-1) = 3	156.2/ 3 = 52.67	52.67/8.817 = 5.9
Tratamiento x *dentro* de los grupos (*error* de A y A x B)	**Anál.1º SC entre +Anál. 3º SCdentro *menos* Anál. 4º SC filas 1392.4+278.8-1459.6 =211.6**	(A-1)(B x (n-1))= (3) (2x4) = 24	211.6/24 =8.817	
Varianza total	La misma en todos los análisis			

Figura 3

Los resultados son los mismos vistos en la tabla 28; como esos análisis de varianza hechos en EXCEL se pueden hacer muy rápidamente, éste puede ser un buen procedimiento en estos diseños mixtos en los que tenemos a la vez muestras independientes y relacionadas.

7.4. Programa en Internet

Para este análisis de varianza disponemos en Internet de un programa específico que nos da la tabla de resultados aunque no los coeficientes de asociación (aunque sí tenemos la información suficiente para calcular η^2).

Lowry, Richard, VassarStats: Web Site for Statistical Computation,Vassar College, Poughkeepsie, NY, USA; http://faculty.vassar.edu/lowry/VassarStats.html

En el menú de la izquierda en ANOVA buscamos **Two-Factor ANOVA with Repeated Measures on One Factor**

En este programa están invertidos los símbolos de los factores (A y B). En el cuadro de entrada *number of rows* no es el número de filas o de sujetos sino el *número de niveles en el factor de medidas repetidas* (o relacionadas, denominado factor A en esta tabla de resultados); en este caso el factor A tiene dos niveles, varones y mujeres (el programa sólo admite dos niveles en este factor A y hasta cuatro columnas en el factor B). Los datos se pueden importar de una tabla Word.

8. Referencias bibliográficas

CALVO GÓMEZ, FÉLIX (1993). *Técnicas estadísticas multivariantes.* Bilbao: Universidad de Deusto.

GIRDEN, ELLEN R. (1992). *Anova repeated measures.* Quantitative Applications in the Social Sciences. Newbury Park & London: Sage

GUILFORD, J. P. y FRUCHTER, B. (1984). *Estadística aplicada a la psicología y la educación,* México: McGraw-Hill.

HINKLE, DENNIS E.; WIERSMA, WILLIAM and JURS, STEPHEN G. (1994). *Applied Statistics for the Behavioral Sciences*. Boston: Houghton-Mifflin.

HUITEMA, BRADLEY E. (1980). *The Analysis of Covariance and Alternatives.* New York: John Wiley & Sons.

HUBERTY, CARL J. and MORRIS, JOHN D. (1987). *Multivariate Analysis Versus Multiple Univariate Analysis.* Paper presented at the Annual Meeting of the American Educational Research Association, Washington, D.C.

IVERSEN, GUDMUND R. and NORPOTH, HELMUT (1987). *Analysis of Variance,* 2nd. edition, Paper Series on Quantitative Applications in the Social Sciences. Newbury Park: Sage.

KIRK, ROGER E. (1995). *Experimental Design, Procedures for the Behavioral Sciences.* Boston: Brooks/Cole.